Posudek oponenta habilitační práce

Masarykova univerzita

Fakulta	Přírodovědecká
Habilitační obor	Matematika – matematická analýza
Uchazeč	RNDr. Michal Veselý, Ph.D.
Pracoviště	ÚMS PřF MU
Habilitační práce	Solution spaces of almost periodic homogeneous linear difference and differential systems
Oponent	prof. RNDr. Svatoslav Staněk, CSc.
Pracoviště	PřF, Univerzita Palackého Olomouc

Habilitační práce pojednává o skoroperiodických a limitně periodických posloupností a funkcí a o vlastnostech řešení homogenních lineárních diferenčních systémů $x_{k+1} = A_k \cdot x_k$ a homogenních lineárních diferenciálních systémů $x'(t) = A(t) \cdot x(t)$. Výsledky jsou formulovány v maticovém tvaru (typu $m \times m$) a vektorovém tvaru (typu $m \times 1$). Práce o rozsahu 182 stran shrnuje výsledky 8 publikovaných článků a 1 článku přijatého k publikaci (4 články jsou publikovány společně s dalším spoluautorem) a rovněž je použita autorova Ph.D. práce.

Habilitační práce je rozdělena do 7 kapitol. Každá kapitola tvoří prakticky uzavřený celek. V úvodu každé kapitoly je uveden široký přehled publikovaných prací k dané problematice, motivace pro studovaný problém, označení, použité prostory a dosažené výsledky. Autor se odkazuje celkem na 182 publikovaných článků a monografií.

První kapitola je věnována vlastnostem skoroperiodických a limitně periodických posloupností. Na rozdíl od literatury se studium provádí v pseudometrických prostorech. Jsou provedeny konstrukce posloupností, které mají jisté speciální vlastnosti. V závěru kapitoly jsou analyzovány diferenční systémy $x_{k+1} = A_k \cdot x_k$ se skoroperiodickými maticemi A_k jejichž členy jsou prvky nekonečného okruhu F s jednotkou a nulou. Hlavní výsledek uvedený ve větě 1.38 říká že existuje systém jehož nulové řešení je jediné skoroperidické.

Druhá kapitola analyzuje řešení systémů $x_{k+1} = A_k \cdot x_k$, kde A_k jsou regulární matice, které patří do nekonečné grupy skoroperiodických matic $\mathcal{G}$. Členy matic jsou prvky okruhu F na kterém je definována metrika. Zavádí se pojem transformovatelné grupy $\mathcal{G}$ a slabě (silně) transformovatelné grupy $\mathcal{G}$. Je uvedeno 13 příkladů transformovatelných grup (unitární matice, ortogonální matice,...). Tyto pojmy jsou zavedeny z toho důvodu že umožňují ve větách 2.19, 2.28 a 2.32 určit širokou třídu systémů, které mají nulové řešení jako jediné skoroperiodické řešení.

Ve třetí kapitole jsou v pseudometrických prostorech uvedeny explicitní konstrukce limitně periodických a skoroperiodických posloupností s oborem hodnot v předem dané množině, která splňuje pouze nutné podmínky. Jejich aplikací jsou dokázány nové výsledky o skoroperiodických řešeních komplexních skoroperiodických diferenčních systémů.

Ve čtvrté kapitole je F nekonečný okruh s nulou a jedničkou a je na něm definována absolutní hodnota. Členy matic jsou prvky okruhu F. Uvažují se diferenční systémy $x_{k+1} = A_k \cdot x_k$, kde A_k patří do ohraničené grupy $\mathcal{G}$. Je dokázáno (věta 4.16) že v množině všech vyšetřovaných systémů, kde A_k jsou limitně periodické matice, existuje hustá podmnožina systémů jejichž nulové řešení je jediné asymptoticky skoroperiodické.

V páté kapitole jsou zavedeny skoroperiodické a limitně periodické funkce definované na reálné ose s hodnotami v pseudometrickém prostoru, a jsou dokázány jejich základní vlastnosti. Podobně jako v první kapitole jsou provedeny konstrukce skoroperiodických funkcí s jistými předepsanými vlastnostmi.

Obsahem šesté kapitoly je analýza řešení antihermitovských a antisymetrických homogenních lineárních diferenciálních systémů. Použitím konstrukcí uvedených v páté kapitole je dokázáno, že v každém okolí skoroperiodického antihermitovského systému existuje jiný takový systém jehož nulové řešení je jediné skoroperiodické řešení. Podobný výsledek je také dokázán pro skoroperiodické antisymetrické systémy.

V sedmé kapitole jsou v pseudometrických prostorech uvedeny zajímavé konstrukce limitně periodických a skoroperiodických funkcí s předem zadanými hodnotami. Tak například pro každou stejnoměrně spojitou funkci, která nabývá konečně mnoha hodnot na množině celých čísel a jejíž obor hodnot je totálně ohraničený, je provedena konstrukce skoroperiodické funkce se stejným oborem hodnot na množině celých čísel a na množině reálných čísel, a která má navíc jisté periodické vlastnosti.

Dotazy oponenta k obhajobě habilitační práce
1) V definici 2.12 silně transformovatelné grupy není zřelmé co je $p(L, \varepsilon_i)$ ve formuli (2.9). Má to nějakou souvislost s $p(L, \varepsilon)$ v části (i) definice 2.1 transformovatelné grupy?
2) Co lze řici o vlatnostech řešení systémů $x_{k+1} = (A_k + B_k) \cdot x_k$ a $x'(t) = (A(t) + B(t)) \cdot x(t)$, kde $A_k, A(t)$ jsou skoroperiodické a $B_k, B(t)$ jsou buď limitně periodické nebo periodické matice.

Závěr

Habilitační práce je napsána mimořádně pečlivě. Uvádí mnoho výsledků, které výrazně rozšiřují a prohlubují publikované výsledky jiných autorů jak v oblasti skoroperiodických a limitně periodických posloupností a funkcí, tak v oblasti řešení homogenních diferenčních a diferenciálních systémů. Velká pozornost je věnována takovým systémům, které maji jediné skoroperiodické řešení. Pro čtenáře není snadné dobré pochopení důkazů a to hlavně vzhledem k zavedeným topologiím, prostorům a skutečnosti, že členy vyšetřovaných matic mohou patřit do nějakého algebraického okruhu. Složitost a hloubka problematiky také ovlivňuje délku některých důkazů (8–14 stran). Obdivuji preciznost a nápaditost při explicitních konstrukcích posloupností a funkcí s požadovanými vlastnostmi. RNDr. Veselý prokázal že se dovede výborně orientovat a má hluboké znalosti ve studované problematice.

Habilitační práce dr. M. Veselého "Solution spaces of almost periodic homogeneous linear difference and differential systems" **splňuje** požadavky standardně kladené na habilitační práce v oboru matematická analýza.

V Olomouci dne 15. dubna 2016